*AVERTISSEMENT :* **Il est rappelé à tous les candidats que le programme officiel de l'épreuve est le programme de Mathématiques des classes préparatoires au concours d'admission du groupe Sciences sociales (B/L) de la section des lettres de l'Ecole normale supérieure , dites "Khagnes S".**

**Toute résolution faisant appel à des résultats ne figurant pas explicitement à ce programme sera rejetée.**

**Objet du Problème :**

*Le sujet est un problème d'analyse et de probabilités dont le but est la détermination des lois de probabilité de certaines variables aléatoires discrètes ou à densité définies à partir d'une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de densité exponentielle.*
*Les candidats sont invités à lire attentivement le problème en entier et à l'aborder dans son intégralité, quitte à utiliser des résultats fournis par l'énoncé même s'ils n'ont pas su les démontrer (en indiquant clairement quels résultats ils ont admis).*
*Les 3 parties sont indépendantes, sauf la question* **II.3.b)** *qui utilise les résultats de la partie* **I**.

**Notations :**

- *Pour deux entiers naturels $p$ et $q \geqslant p$, on note $[\![p, q]\!] = [p, q] \cap \mathbb{N}$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers naturels compris, au sens large, entre $p$ et $q$.*
- *Dans tout le problème, on considère un univers $\Omega$ muni d'une probabilité $\mathbf{P}$ et des variables aléatoires définies sur $\Omega$, discrètes ou à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, à densité continue sur $\mathbb{R}_+$. Dans ce cas, on ne s'intéressera qu'à la restriction à $\mathbb{R}_+$ de leur densité ou de leur fonction de répartition.*
- *Pour deux événements $A$ et $B$, on désigne par $\mathbf{P}(A \mid B)$ la probabilité de $A$ sachant $B$.*

## Partie I

1° Soit $f$ une fonction de classe $C^\infty$ sur un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$ contenant 0. Prouver par récurrence sur $p$ que

$$(\forall\, x \in I)\ (\forall\, p \in \mathbb{N}) \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{p} \left( f^{(k)}(0)\, \frac{x^k}{k!} \right) + \int_0^x f^{(p+1)}(t)\, \frac{(x-t)^p}{p!}\, \mathrm{d}t \qquad (1)$$

où $f^{(k)}$ désigne la dérivée $k$-ième de $f$.

Pour $x \in [0, 1[$, on pose $h(x) = \ln(1 - x)$.

2° Calculer la dérivée $p$-ième de $h$.

3° Soit $x \in [0, 1[$ fixé. Déterminer

$$\lim_{p \to +\infty} \left( \int_0^x h^{(p+1)}(t)\, \frac{(x-t)^p}{p!}\, \mathrm{d}t \right).$$

On pourra commencer par étudier les variations de la fonction $\varphi(t) = \dfrac{t-x}{t-1}$ sur l'intervalle $[0, x]$.

4° En déduire que

$$(\forall\, x \in [0, 1[) \qquad \ln(1 - x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}. \qquad (2)$$

5° Montrer que

$$(\forall\, x \in [0,1[) \qquad x + (1-x)\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}\,. \tag{3}$$

## Partie II

1° Soit $X$ une variable aléatoire réelle à densité continue sur $\mathbb{R}_+$, qu'on peut interpréter comme la durée de vie d'un phénomène aléatoire, ayant la propriété suivante : la durée de vie résiduelle à chaque instant suit la même loi de probabilité que $X$.

**a)** Montrer que cette condition s'écrit :

$$(\forall\, s \in \mathbb{R}_+)\,(\forall\, t \in \mathbb{R}_+) \quad G(t+s) = G(t)\,G(s) \tag{4}$$

où l'on a posé, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $G(t) = P(X > t)$.

**b)** Vérifier que la propriété (4) ci-dessus est satisfaite lorsque $X$ suit une loi exponentielle sur $\mathbb{R}_+$.

*Dans toute la suite du problème, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi de probabilité exponentielle sur $\mathbb{R}_+$ de paramètre $\alpha > 0$, c'est-à-dire de densité*

$$g(t) = \alpha e^{-\alpha t} \qquad \textit{pour} \quad t \in \mathbb{R}_+\,.$$

*On note $F$ la fonction de répartition associée, c'est-à-dire la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par*

$$F(x) = P(X_0 \leqslant x)\,.$$

Dans la suite de cette partie, on considère la variable aléatoire $N$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ égale au plus petit indice $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_n > X_0$.

2° **a)** Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $P(N = n \mid X_0 = x_0)$ en fonction de $p_0 = e^{-\alpha x_0}$.

**b)** En déduire que la loi de probabilité de $N$ est

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}^*) \qquad P(N = n) = \frac{1}{n(n+1)}\,.$$

**c)** La variable aléatoire $N$ a-t-elle une espérance ?

3° **a)** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(X_N \leqslant x \mid N = n)$.

**b)** Déterminer la fonction de répartition $\Psi$ de $X_N$ et sa densité $\psi$.
On pourra utiliser la partie I.

## Partie III

Dans toute cette partie, $m$ désigne un entier naturel non nul fixé. On range les variables aléatoires $X_0, X_1, \ldots X_m$ par ordre *décroissant*, pour obtenir une nouvelle suite de variables aléatoires notées $Y_0, Y_1, \ldots Y_m$. Ainsi, on a

$$Y_0 = \text{Max}\{X_k\,,\ 0 \leqslant k \leqslant m\} \quad \text{et} \quad Y_m = \text{Min}\{X_k\,,\ 0 \leqslant k \leqslant m\}\,.$$

**1°** Déterminer la fonction de répartition $\Phi_0$ de $Y_0$ ainsi que sa densité $\varphi_0$.

**2°** Déterminer la fonction de répartition $\Phi_m$ de $Y_m$ ainsi que sa densité $\varphi_m$.

**3°** On désigne par $\widehat{N}$ la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ égale au plus petit indice $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_{m+n} > Y_0$.

**a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$P(\widehat{N} > n) = \frac{m+1}{m+n+1}\,.$$

**b)** En déduire la loi de la variable aléatoire $\widehat{N}$.

**c)** La variable aléatoire $\widehat{N}$ a-t-elle une espérance ?

**4°** **a)** Prouver que, pour tout $k \in [\![1, m]\!]$ et $(y_0, y_1, \ldots, y_k) \in (\mathbb{R}_+)^{k+1}$, on a :

$$P(X_0 - X_1 > y_0,\ X_1 - X_2 > y_1,\ \ldots,\ X_{k-1} - X_k > y_{k-1},\ X_k > y_k) = \frac{1}{(k+1)!} \exp\left[-\alpha \sum_{j=0}^{k} (j+1)\, y_j\right]\,. \qquad (5)$$

On pourra procéder par récurrence sur $k$ en exprimant la probabilité cherchée en fonction de

$$P(X_0 - X_1 > y_0,\ X_1 - X_2 > y_1,\ \ldots,\ X_{k-2} - X_{k-1} > y_{k-2},\ X_{k-1} > y_{k-1} + t)\,,$$

pour $t$ dans un domaine à préciser.

On admet que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $(y_0, y_1, \ldots, y_k) \in (\mathbb{R}_+)^{k+1}$, on a par symétrie :

$$P(Y_0 - Y_1 > y_0,\ Y_1 - Y_2 > y_1,\ \ldots,\ Y_{k-1} - Y_k > y_{k-1},\ Y_k > y_k) = (k+1)!\ P(X_0 - X_1 > y_0,\ X_1 - X_2 > y_1,\ \ldots,\ X_{k-1} - X_k > y_{k-1},\ X_k > y_k)\,. \qquad (6)$$

**b)** En choisissant des valeurs particulières de $y_0, \ldots, y_k$, prouver que, pour $k \in [\![1, m]\!]$, la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y_{k-1} - Y_k$ a pour densité sur $\mathbb{R}_+$ la fonction

$$t \to \alpha k e^{-\alpha k t}$$

et montrer que les variables aléatoires $Y_0 - Y_1$, $Y_1 - Y_2$, $\ldots$, $Y_{m-1} - Y_m$ et $Y_m$ sont indépendantes.

**c)** Montrer que, pour $k \in [\![1, m]\!]$, la variable aléatoire $Y_0 - Y_k$ a pour fonction de répartition sur $\mathbb{R}_+$

$$F_k(y) = [1 - e^{-\alpha y}]^k \qquad (7)$$

et déterminer sa densité $f_k$.
On pourra encore procéder par récurrence sur $k$.

5° On désigne par $\tilde{N}$ la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ égale au plus petit indice $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_{m+n} \notin [Y_m, Y_0]$, c'est-à-dire tel que

$$X_{m+n} < \text{Min}\{X_k \,/\, 0 \leqslant k \leqslant m\} \quad \text{ou} \quad X_{m+n} > \text{Max}\{X_k \,/\, 0 \leqslant k \leqslant m\}\,.$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $z \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer

$$P(\, x \leqslant X_{m+k} \leqslant x + z\,,\ \forall\, k \in [\![1,n]\!]\,)\,.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$P(\, Y_m \leqslant X_{m+k} \leqslant Y_m + z\,,\ \forall\, k \in [\![1,n]\!]\,) = \frac{m+1}{m+n+1}\,[1 - e^{-\alpha z}]^n\,. \qquad (8)$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que,

$$P(\tilde{N} > n) = \frac{m\,(m+1)}{m+n+1} \int_0^{+\infty} \alpha\,[1 - e^{-\alpha z}]^{m+n-1}\, e^{-\alpha z}\, dz \qquad (9)$$

et en déduire $P(\tilde{N} > n)$.

d) En déduire la loi de probabilité de $\tilde{N}$.
La variable aléatoire $\tilde{N}$ a-t-elle une espérance ?

6° Soit $k \in [\![0, m]\!]$.

a) Pour $z \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer $P(Y_k \leqslant z)$.
On pourra exprimer l'événement $(Y_k \leqslant z)$ à l'aide des événements $(X_j \leqslant z)$, pour obtenir une expression de $P(Y_k \leqslant z)$ faisant intervenir un symbole $\sum$, qu'on ne cherchera pas à calculer explicitement.

b) En déduire que la densité de la loi de probabilité de $Y_k$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\varphi_k(z) = \alpha\,(k+1)\,C_{m+1}^{k+1}\,[1 - e^{-\alpha z}]^{m-k}\, e^{-\alpha(k+1)z}\,. \qquad (10)$$

c) Les variables aléatoires $(Y_k)_{0 \leqslant k \leqslant m}$ sont-elles indépendantes ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail